ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ՏՆՏԵՍԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

ԳՈՌ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ասպիրանտ

ՀԱՍԱՐԱԿ ԵՎ ՄԱՍՆԱԿԻ ՄԱՐՈՒՄՆԵՐՈՎ ԱՐԺԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՊԱՐՏԱՏՈՄՍԵՐԻ ՄԻՆՉԵՎ ՄԱՐՈՒՄ ԵԿԱՄՏԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՏԵՂ ՎԱՐՔԱԳԻԾԸ ՍՓՈԹ ԿՈՐԻ ՏԱՐԲԵՐ ՏԵՍՔԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Սույն հոդվածում, սփոթ կորի տարբեր տեսքերի պայմաններում, վերլուծվում է հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունների համատեղ վարքագիծը՝ պարտատոմսերի պարամետրերի (արժեկտրոնի դրույք և արժեկտրոնների քանակ) հավասար լինելու ենթադրության պայմաններում: Նելսոն-Սիգելի մոդելի միջոցով, սիմուլյացնելով սփոթ կորեր և կիրառելով որոշ թվային մեթոդներ, ցույց է տրվում, որ աճող սփոթ կորի դեպքում հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունը գերազանցում է մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությանը: Նվազող տեսքով սփոթ կորի դեպքում հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունը զիջում է մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությանը: Պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունները համընկնում են միայն այն դեպքում, երբ սփոթ կորն ունի համահարթ տեսք:

Հիմնաբառեր. *արժեկտրոնային պարտատոմս, մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմս, մինչև մարում եկամտաբերություն, Նելսոն-Սիգելի մոդել, ինտերպոլյացիա*
JEL: C02, C10, G12

Ներածություն: Պարտատոմսը պարզագույն պարտքային արժեթուղթ է, որը հավաստում է տիրապետողի իրավունքը՝ նախատեսված ժամկետում պարտատոմս թողարկած անձից ստանալ պարտատոմսի անվանական արժեքը և արժեկտրոնային վճարումները: Առավել տարածված պարտատոմսի տեսակներից է հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսը, որի տիրապետողը որոշակի պարբերականությամբ ստանում է արժեկտրոնային վճարումներ, իսկ պարտատոմսի անվանական արժեքը վճարվում է պարտատոմսի մարման պահին: Պարտատոմսի տեսակներից է նաև մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսը, որը, ի տարբերություն հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի, անվանական արժեքը վճարում է որոշակի պարբերականությամբ՝ մասնակի վճարումների տեսքով:

Քանի որ մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսերի անվանական արժեքը մարվում է աստիճանաբար, ապա դրանցով շատ ավելի հաճախ ֆինանսավորվում են ծրագրեր, որոնք կայուն եկամտի հոսք են ապահովում պարտատոմսի ժամկետայնության ընթացքում: Մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսերով պարտքային միջոցների ներգրավումն առավելապես կիրառվում է կառավարությունների կողմից: Թեև մասնավոր հատվածում մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսերը լայն կիրառություն չունեն (*Ջ. Գերարդ, Ե. Շվարց*[1]), սակայն որոշ ֆինանսական կարիքների պարագայում ընկերություններն այս գործիքն օգտագործում են պարտք ներգրավելու համար:

Արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի դրամական հոսքերի կառուցվածքների տարբերությունը, այլ հավասար պայմաններում, հանգեցնում է պարտատոմսերի գների, մինչև մարում եկամտաբերությունների, դյուրացիաների միջև տարբերությունների: Սույն հոդվածի շրջանակում վերոգրյալ երկու տիպի պարտատոմսերի պարամետրերի (արժեկտրոնի դրույք և արժեկտրոնների քանակ) հավասար լինելու ենթադրության պայմաններում ուսումնասիրվում է պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների համատեղ վարքագիծը՝ սփոթ կորի տարբեր տեսքերի դեպքում:

Գրականության ակնարկ: Մասնագիտական աղբյուրներում ֆիքսված եկամտով արժեթղթերին (fixed income securities), մասնավորապես՝ պարտատոմսերին և պարտատոմսերի շուկաներին նվիրված է հսկայածավալ բաժին, որը ֆիքսված եկամտով արժեթղթերը և դրանց շուկաներն ուսումնասիրում է տարբեր դիտանկյուններից: Պարտատոմսերին վերաբերող ուսումնասիրություններում առավելապես ուշադրության կենտրոնում են եկամտաբերության կորերի մոդելավորումը և դրանց հետազոտումը (*Ջ. Ֆրենսիս, Ջ. Հուա*[2], *Ռ. Ֆյուս, Օ. Նիկիտինա*[3], *Ա. Կալոտեյ, Մ. Դորիգան*[4], *Ք. Նելսոն, Ա. Սիգել*[5], *Օ.*

[1] Տե՛ս **Guerard J.B., Schwartz E.,** Quantitative Corporate Finance. Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Տե՛ս **Francis J.C., Hua J.,** Forecasting Yield Curves with Survey Information. The Journal of Portfolio Management, 38 (3), 2012, էջ 149-155:

[3] Տե՛ս **Füss R., Nikitina O.,** Explaining Yield Curve Dynamics. The Journal of Fixed Income, 21(2), 2011, էջ 68-87:

[4] Տե՛ս **Kalotay A.J., Dorigan M.P.,** What Makes the Municipal Yield Curve Rise? The Journal of Fixed Income, 18(3), 2009, էջ 65-71:

Վասիքեկ[6]), պարտատոմսերում ներդրում անելու հետ կապված ռիսկերի, մասնավորապես՝ տոկոսադրույքի ռիսկին վերաբերող որոշ հարցեր (*Զ. Աֆիկ, Ջ. Գադի, Զ. Ուիներ*[7], *Թ. Առնոլդ, Ջ. Էռլ, Ս.Մարշալ*[8], *Ջ. Բյութոու, Ֆ. Ֆաբոզզի, Բ. Հանկե*[9], *Բ. Գոլուբ, Լ. Թիլման*[10], *Ա. Իլմանեն*[11], *Ա. Կալոտեյ, Ջ. Բուրսմա*[12] և այլք):

Չնայած պարտատոմսերի վերաբերյալ հետազոտական աշխատանքների լայնածավալ մասշտաբներին՝ հետազոտություններում առկա չեն հաստատուն արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի միջև զուգահեռներ տանելու փորձեր: Մասնավորապես, հաստատուն արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի պարամետրերի (արժեկտրոնի դրույք և արժեկտրոնների քանակ) հավասար լինելու դեպքում հետազոտված չեն պարտատոմսերի այլ պարամետրերի (օրինակ՝ մինչև մարում եկամտաբերություն, Մաքոլիի կամ ձևափոխված դյուրացիա) միջև առաջացող տարբերությունները՝ պայմանավորված պարտատոմսերի դրամական հոսքերի կառուցվածքային առանձնահատկություններով:

Հետազոտության մեթոդաբանություն: Սփոթ կորի տարբեր տեսքերի դեպքում պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև կապը հետազոտելու նպատակով թվային մեթոդների կիրառմամբ մշակվում է հետևյալ ալգորիթմ: Ալգորիթմի առաջին քայլով Նելսոն-Սիգելի մոդելի միջոցով սիմուլյացվում են սփոթ կորեր, որոնք ունեն համահարթ, աճող և նվազող տեսքեր՝ մակարդակի և թեքության պարամետրերի տարբեր արժեքներով: Երկրորդ քայլով, կիրառելով Նյուտոն-Ռաֆսոնի մեթոդը, Նելսոն-Սիգելի մոդելի պարամետրերի տարբեր արժեքների համար գնահատվում են պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունները: Երրորդ քայլով, գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդով մոտարկվում է պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների տարբերության ֆունկցիան:

Սահմանումներ

Պարտատոմսի գին. պարտատոմսի գինը սպասվող դրամական հոսքի ներկա արժեքն է, հետևաբար տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

---

[5] Տե՛ս **Nelson C.R., Siegel A.F.,** Parsimonious Modeling of Yield Curves. Journal of Business, 60 (4), 1987, էջ 473–489:

[6] Տե՛ս **Vasicek O.A.**, Interpolating the Yield Curve. The Journal of Fixed Income, 2020:

[7] Տե՛ս **Afik Z., Gady J., Wiener Z.,** Duration and Globalization. The Journal of Fixed Income, 28(2), 2018, էջ 31-43.

[8] Տե՛ս **Arnold T., Earl J.H., Marshall C.D.**, A Quick Approximation for Modified Bond Duration and Convexity. The Journal of Wealth Management Winter, 18(3), 2015, էջ 53-56:

[9] Տե՛ս **Buetow G.W., Fabozzi F.J., Hanke B.**, A Note on Common Interest Rate Risk Measures. The Journal of Fixed Income, 2003, 13(2), էջ 46-54:

[10] Տե՛ս **Golub B.W., Tilman L.M.**, Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components, Analysis, Value, At Risk, And Key Rate Durations. The Journal of Portfolio Management, 23 (4), 1997, էջ 72-84:

[11] Տե՛ս **Ilmanen A.,** When do Bond Markets Reward Investors for Interest Rate Risk? The Journal of Portfolio Management, 22(2), 1996, էջ 52-64:

[12] Տե՛ս **Kalotay A., Buursma J.**, The Key Rate Durations of Municipal Bonds. The Journal of Fixed Income, 29(2), 2019, էջ 61-64:

$$P(B(0,1),\ldots,B(0,n),CF_1,\ldots.,CF_n,n)=\sum_{t=1}^{n}B(0,t)CF_t, \qquad (1)$$

որտեղ՝ $B(0,t)$-ն t-րդ պահին ստացվող միավոր դրամական հոսքի բերված արժեքն է ժամանակի $t=0$ պահին,
CF_t-ն՝ t-րդ պահին ստացվող դրամական հոսքը,
n-ը՝ պարտատոմսի վճարումների քանակը,
$P(B(0,1),\ldots,B(0,n),CF_1,\ldots.,CF_n,n)$-ն՝ պարտատոմսի գինը:

Պարտատոմսի գինը հաշվելու համար անհրաժեշտ է սահմանել $B(0,1),\ldots,B(0,n)$ դիսկոնտավորման գործակիցները, որոնք ընդհանուր դեպքում տրվում են հետևյալ տեսքով՝

$$B(0,t)=\frac{1}{\left(1+R(0,t)\right)^t}, \qquad (2)$$

որտեղ $R(0,t)$-ն սփոթ տոկոսադրույքն է:

Սփոթ կոր. սփոթ տոկոսադրույքը որպես ֆունկցիա, կախված ժամկետայնությունից, կոչվում է «սփոթ կոր» (*Լ. Մարտելինի, Պ. Պրիոլետ, Ս.Պրիոլետ*[13]): Սփոթ կորը, ժամկետայնությունից կախված, հիմնականում աճող տեսք ունի, ինչը ենթադրում է, որ որքան երկար է ժամկետայնությունը, այնքան բարձր է եկամտաբերությունը: Նվազող տեսքով սփոթ կորի դեպքում որքան երկար է ժամկետայնությունը, այնքան ցածր է եկամտաբերությունը: Այն դեպքում, երբ եկամտաբերությունը մոտավորապես նույնն է՝ անկախ ժամկետայնությունից, սփոթ կորը հայտնի է որպես համահարթ սփոթ կոր:

Մինչև մարում եկամտաբերություն. մինչև մարում եկամտաբերությունը դիսկոնտավորման այն տոկոսադրույքն է, որը հավասարեցնում է պարտատոմսի դրամական հոսքերի բերված արժեքն իր շուկայական գնին և հանդիսանում է պարտատոմսի սպասվող դրամական հոսքերի եկամտաբերության ներքին նորմը: Այլ կերպ ասած, մինչև մարում եկամտաբերությունը սփոթ դրույքների կշռված միջինն է[14] (*Դ. Սմիթ*[15]):

$$P(R(0,1),\ldots,R(0,n),CF_1,\ldots,CF_n,n)=\sum_{t=1}^{n}\frac{CF_t}{\left(1+R(0,t)\right)^t}=\sum_{t=1}^{n}\frac{CF_t}{(1+y)^t}=P(y,CF_1,\ldots,CF_n,n), \qquad (3)$$

որտեղ y-ը մինչև մարում եկամտաբերությունն է:

Արժեկտրոնային պարտատոմսի գին. արժեկտրոնային պարտատոմսը որոշակի պարբերականությամբ վճարում է ֆիքսված արժեկտրոններ, իսկ պարտատոմսի անվանական արժեքը վճարում է պարտատոմսի մարման պահին[16]: Հետևաբար, արժեկտրոնային պարտատոմսի գինը կարող է ներկայացվել հետևյալ բանաձևի միջոցով՝

[13] Տե՛ս **Martellini L., Priaulet P., Priaulet S.**, Fixed-Income Securities. Willey & Sons, 2003:
[14] Տե՛ս CFA Institute Investment Series, Fixed Income Analysis (3rd Edition). Willey & Sons, 2015:
[15] Տե՛ս **Smith D.J.**, Bond Math: The Theory Behind the Formulas. Willey & Sons, 2011:
[16] Արժեկտրոնային պարտատոմսի դրամական հոսքի կառուցվածքը ենթադրում է, որ $t=1,\ldots,n-1$ $CF_t=\alpha N$ և $CF_n=\alpha N+N$:

$$P'(R(0{,}1),\ldots R(0,n),N,\alpha,n) = \sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha N}{\left(1+R(0,t)\right)^{t}}+\frac{N}{\left(1+R(0,n)\right)^{n}}, \qquad (4)$$

որտեղ՝ N-ը պարտատոմսի անվանական արժեքն է,

α-ն՝ արժեկտրոնի դրույքը,

$P'(R(0{,}1),\ldots R(0,n),N,\alpha,n)$-ը՝ արժեկտրոնային պարտատոմսի գինը:

Մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի գին. մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի անվանական արժեքը վճարվում է հավասար մասնակի վճարումների միջոցով[17], հետևաբար գինը տրվում է հետևյալ բանաձևի միջոցով՝

$$P''(R(0{,}1),\ldots R(0,n),N,\alpha,n) = \sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha\left(N-\frac{N}{n}(t-1)\right)+\frac{N}{n}}{\left(1+R(0,t)\right)^{t}}, \qquad (5)$$

որտեղ $P''(R(0{,}1),\ldots R(0,n),N,\alpha,n)$-ը մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի գինն է:

Ենթադրություններ

Այս հետազոտության առանցքային ենթադրությունը հետևյալն է. Արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի արժեկտրոնի դրույքները և արժեկտրոնների քանակները հավասար են: Բացի դրանից, պարզության համար ենթադրվում է, որ պարտատոմսերի արժեկտրոնները վճարվում են տարեկան պարբերականությամբ:

Վերլուծություն

Անալիտիկ մեթոդի սահմանափակումներ

Հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի պարամետրերի (արժեկտրոնի դրույք և արժեկտրոնների քանակ) հավասար լինելու դեպքում պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունները տարբեր են՝ պայմանավորված դրամական հոսքերի կառուցվածքային տարբերությամբ: Բացառություն է այն դեպքը, երբ սփոթ կորը համահարթ է, որի դեպքում պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունները հավասար են: Այս պնդումը ակնհայտ է հետևյալ երկու հավասարումներից՝

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha N}{\left(1+R(0,t)\right)^{t}}+\frac{N}{\left(1+R(0,n)\right)^{n}}}_{P'(R(0,1),\ldots,R(0,n),\cdot)} = \underbrace{\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha N}{(1+y')^{t}}+\frac{N}{(1+y')^{n}}}_{P'(y',\cdot)}, \qquad (6)$$

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha\left(N-\frac{N}{n}(t-1)\right)+\frac{N}{n}}{\left(1+R(0,t)\right)^{t}}}_{P''(R(0,1),\ldots,R(0,n),\cdot)} = \underbrace{\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha\left(N-\frac{N}{n}(t-1)\right)+\frac{N}{n}}{(1+y'')^{t}}}_{P''(y'',\cdot)}, \qquad (7)$$

[17] Մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսը ենթադրում է, որ $t=1,\ldots,n$-ի համար $CF_t=\alpha\left(N-\frac{N}{n}(t-1)\right)+\frac{N}{n}$:

որտեղ y'-ը և y''-ը համապատասխանաբար արժեկտրոնային պարտատոմսի և մանակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերություններն են, որոնք հավասար են համահարթ սփոթ կորի ենթադրության պարագայում $(R(0,1) = R(0,2) = \cdots = R(0,n) = y' = y'')$:

Այնուամենայնիվ, աճող կամ նվազող տեսքով սփոթ կորի դեպքում, պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև կապը որոշակի չէ: Այս դեպքերն ուսումնասիրելու նպատակով, պարզագույն ձևափոխությունների կիրառմամբ, (6) և (7) հավասարումները ներկայացվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha}{\left(1+R(0,t)\right)^{t}}+\frac{1}{\left(1+R(0,n)\right)^{n}}\right)(1+y')^{n}-\sum_{t=1}^{n}\alpha(1+y')^{n-t}-1=0, \quad (8)$$

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{n}(t-1)\right)+\frac{1}{n}}{\left(1+R(0,t)\right)^{t}}(1+y'')^{n}-\sum_{t=1}^{n}\left(\alpha\left(1-\frac{1}{n}(t-1)\right)+\frac{1}{n}\right)(1+y'')^{n-t}=0: \quad (9)$$

y'-ի և y''-ի միջև փոխկապակցվածությունը որոշելու նպատակով անհրաժեշտ է լուծել (8) և (9) բազմանդամային հավասարումները՝ համապատասխանաբար $1+y'$-ի և $1+y''$-ի նկատմամբ, այնուհետև արմատներից հանել 1: Այնուամենայնիվ, համաձայն Աբել-Ռուֆֆինիի թեորեմի (հայտնի է նաև որպես Աբելի թեորեմ)՝ հնարավոր չէ գտնել 5 և 5-ից բարձր աստիճանի բազմանդամային հավասարման հանրահաշվական լուծում: Հետևաբար, (8) և (9) բազմանդամային հավասարումների հանրահաշվական լուծումները հնարավոր է գտնել համապատասխան մեթոդների միջոցով, եթե պարտատոմսերի արժեկտրոնների քանակը չի գերազանցում 4-ը ($n = 2,3,4$): Մասնավորապես, $n = 3$ և $n = 4$ դեպքերում լուծումը հնարավոր է գտնել՝ օգտագործելով համապատասխանաբար Կարդանոյի և Ֆերրարիի մեթոդները: Այնուամենայնիվ, կարելի է ցույց տալ, որ $n = 2,3,4$ դեպքերում բազմանդամային հավասարումների արմատներն ունեն բարդ տեսք, ինչը հանրահաշվական առումով առավել բարդացնում է y'-ի և y''-ի միջև փոխկապակցվածությունը որոշելու խնդիրը: Օրինակ, ամենապարզ դեպքում $n = 2$ (8) հավասարման արմատը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y' = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^{2}+4(1+\alpha)k'}}{2k'}-1, \quad (10)$$

որտեղ $k' \triangleq \frac{\alpha}{1+R(0,1)}+\frac{1+\alpha}{\left(1+R(0,2)\right)^{2}}$:

Իսկ (9) հավասարման արմատը $n = 2$ դեպքում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y'' = \frac{\alpha+{}^{1}/_{2}+\sqrt{\left(\alpha+{}^{1}/_{2}\right)^{2}+4\left(\alpha\left(1+{}^{1}/_{2}\right)+{}^{1}/_{2}\right)k''}}{2k''}-1, \quad (11)$$

որտեղ $k'' \triangleq \frac{\alpha+{}^{1}/_{2}}{1+R(0,1)}+\frac{\alpha\left(1+{}^{1}/_{2}\right)+{}^{1}/_{2}}{\left(1+R(0,2)\right)^{2}}$:

Պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների համատեղ վարքագծի անալիտիկ ուսումնասիրության նկատառումից ելնելով՝ հնարավոր է նաև դիտարկել բազմանդամի արմատների սահմանների գնահատման դասական մեթոդների կիրառման արդյունավետությունը: Կոշու թեորեմը (*Հ.Հիրսթ, Ու. Մասեյ*[18]) պնդում է, որ եթե x-ը $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ բազմանդամի արմատն է, որտեղ $n \geq 1$ և $a_n \neq 0$, ապա

$$|x| \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|: \qquad (12)$$

Համաձայն Դեկարտի նշանների կանոնի (rule of signs)՝ (8) և (9) բազմանդամային հավասարումներն ունեն մեկ դրական արմատ, ուստի, բազմանդամային հավասարումների արմատների համար կիրառելով Կոշու թեորեմը, ստացվում է՝

$$I' := \left\{ y' \middle| 0 \leq y' \leq 1 + (1+\alpha) \middle/ \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{\alpha}{\left(1 + R(0,t)\right)^t} + \frac{1}{\left(1 + R(0,n)\right)^n} \right) \right\}, \qquad (13)$$

$$I'' := \left\{ y'' \middle| 0 \leq y'' \leq 1 + \left(\alpha + {}^1\!/_n\right) \middle/ \sum_{t=1}^{n} \frac{\alpha\left(1 - \frac{1}{n}(t-1)\right) + \frac{1}{n}}{\left(1 + R(0,t)\right)^t} \right\}: \qquad (14)$$

Քննության առնելով I' և $I''-$ը, ակնհայտ է, որ $I' \cap I'' \neq \emptyset$: Որպես հետևություն, արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև համատեղ վարքագծի ուսումնասիրության համատեքստում այս մոտեցումը, ընդհանուր առմամբ, անարդյունավետ է: Բացի դրանից, նմանօրինակ դատողություններ հնարավոր է կատարել այլընտրանքային մեթոդների կիրառմամբ, մասնավորպես՝ արմատների սահմանների որոշման Լագրանժի (*Հ. Հիրսթ, Ու. Մասեյ*[19]) և Ֆուջիվարայի (*Մ. Ֆուջիվարա*[20]) մեթոդներով, որոնք համապատասխանաբար սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$\max\left\{1, \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|\right\}, \qquad (15)$$

$$2\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{\frac{1}{n-1}}, \left|\frac{a_0}{2a_n}\right|^{\frac{1}{n}}\right\}: \qquad (16)$$

Թվային մեթոդ

Անալիտիկ մեթոդի կիրառման անարդյունավետության պայմաններում հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև կապը հնարավոր է սահմանել թվային մեթոդների կիրառման միջոցով: Հաջոր-

---

[18] Տե՛ս **Hirst H.P., Macey W.T.,** Bounding the Roots of Polynomials. The College Mathematics Journal, 28(4), 1997, էջ 292-295:

[19] Տե՛ս նույն տեղը:

[20] Տե՛ս **Fujiwara M.**, Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Tohoku Mathematical Journal, First series, 10, 1916, էջ 167–171:

դիվ ներկայացված է սույն հոդվածի շրջանակում մշակված թվային գնահատման եռաքայլ ալգորիթմը:

Քայլ 1 – Սփոթ կորերի սիմուլյացիա. Նելսոն-Սիգելի մոդելի շրջանակում սիմուլյացվում են սփոթ կորեր, որոնք ունեն համահարթ, աճող և նվազող տեսքեր՝ մակարդակի (level) և թեքության (slope) պարամետրերի տարբեր արժեքներով:

Նելսոն-Սիգելի մոդելը (*Ս.Նելսոն, Ա. Սիգել*[21]) ենթադրում է, որ ֆորվարդ կորը կարող է ներկայացվել հետևյալ տեսքով՝

$$f(0,t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 \left(\frac{t}{\tau_1}\right) e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \qquad (17)$$

որտեղ $f(0,t)$-ն ֆորվարդ տոկոսադրույքն է և $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$-ները պարամետրերն են: Կիրառելով

$$R^c(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(0,s)ds, \qquad (18)$$

ստացվում է, որ

$$R^c(0,t) = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}}\right) + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right), \qquad (19)$$

որտեղ $R^c(0,t)$ -ն անընդհատ հաշվեգրվող սփոթ տոկոսադրույքն է: $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ պարամետրերը համապատասխանաբար չափում են կորի մակարդակը, թեքությունը և կորությունը, իսկ τ_1-ը մասշտաբի (scale) պարամետրն է: Հայտնի է, որ եթե $\beta_1 > 0$ և $\beta_1 < 0$, ապա սփոթ կորը համապատասխանաբար աճող է և նվազող:
$\beta_2 = 0$ և $\beta_0 \in [0.05, 0.1]$, $\beta_1 \in [-0.05, 0.05]$, $\alpha \in [0.01, 0.1]$, $n \in [10,30] \cap \mathbb{Z}^+$, $\tau_1 = 3.0$ ենթադրություններով[22], Նելսոն-Սիգելի մոդելի միջոցով սիմուլյացված սփոթ տոկոսադրույքները տեղադրելով (8) և (9) բազմանդամային հավասարումներում, ստացվում է՝

$$\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha}{\left(1+\beta_0+\beta_1\frac{\tau_1}{t}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)\right)^t} + \frac{1}{\left(1+\beta_0+\beta_1\frac{\tau_1}{n}\left(1-e^{-\frac{n}{\tau_1}}\right)\right)^n}\right)(1+y')^n - \sum_{t=1}^{n}\alpha(1+y')^{n-t} - 1 = 0, \qquad (20)$$

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{n}(t-1)\right)+\frac{1}{n}}{\left(1+\beta_0+\beta_1\frac{\tau_1}{t}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)\right)^t}(1+y'')^n - \sum_{t=1}^{n}\left(\alpha\left(1-\frac{1}{n}(t-1)\right)+\frac{1}{n}\right)(1+y'')^{n-t} = 0: \qquad (21)$$

Քայլ 2 – Բազմանդամների արմատների գնահատում. այս քայլով գնահատվում են (20) և (21) բազմանդամային հավասարումների արմատները: Այդ նպատակով, $\beta_0 \in [0.05, 0.1]$, $\beta_1 \in [-0.05, 0.05]$, $\alpha \in [0.01, 0.1]$

---

[21] Տե՛ս **Nelson C.R., Siegel A.F.,** Parsimonious Modeling of Yield Curves. Journal of Business, 60 (4), 1987, 473–489:

[22] $\beta_2 = 0$ ենթադրությունը երաշխավորում է, որ $\beta_1 = 0$ պայմանի դեպքում սփոթ կորը համահարթ է:

յուրաքանչյուր ինտերվալից նույնականացվում (իդենտիֆիկացվում) են m հավասարաչափ հեռացված կետեր, որոնց համապատասխան բազմություններն են՝ $\omega_{\beta_0}^m := \{\beta_{0_i}\}_{i=1}^m$, որտեղ $\beta_{0_1} < \cdots < \beta_{0_m}$, $\omega_{\beta_1}^m := \{\beta_1\}_{i=1}^m$, որտեղ $\beta_{1_1} < \cdots < \beta_{1_m}$ և $\omega_\alpha^m := \{\alpha_i\}_{i=1}^m$, որտեղ $\alpha_1 < \cdots < \alpha_m$[23]: Բացի դրանից, $n \in [10{,}30] \cap \mathbb{Z}^+$ ինտերվալում նույնականացվում են k հավասարաչափ հեռացված կետեր, իսկ համապատասխան բազմությունը սահմանվում է որպես $\omega_n^k := \{n_i\}_{i=1}^k$, որտեղ $n_1 < \cdots < n_k$[24]: Ի հավելումն, ֆիքսվում է $\tau_1 = 3.0$, և հետևաբար $\omega_{\tau_1} := \{\tau_1\}$-ն մեկ տարր պարունակող բազմություն է:

Համաձայն Դեկարտի նշանների կանոնի՝ (20) և (21) բազմանդամային հավասարումներն ունեն մեկ դրական արմատ: Արդյունքում, կիրառելով Նյուտոն-Ռաֆսոնի մեթոդը, բազմանդամային հավասարումների արմատները գնահատվում են պարամետրերի արժեքների հետևյալ գրիդի վրա՝

$$\omega_{\beta_0}^m \times \omega_{\beta_1}^m \times \omega_{\tau_1} \times \omega_\alpha^m \times \omega_n^k = \{(\beta_0, \beta_1, \tau_1, \alpha, n) | \beta_0 \in \omega_{\beta_0}^m, \beta_1 \in \omega_{\beta_1}^m, \tau_1 \in \omega_{\tau_1}, \alpha \in \omega_\alpha^m, n \in \omega_n^k\}: \quad (22)$$

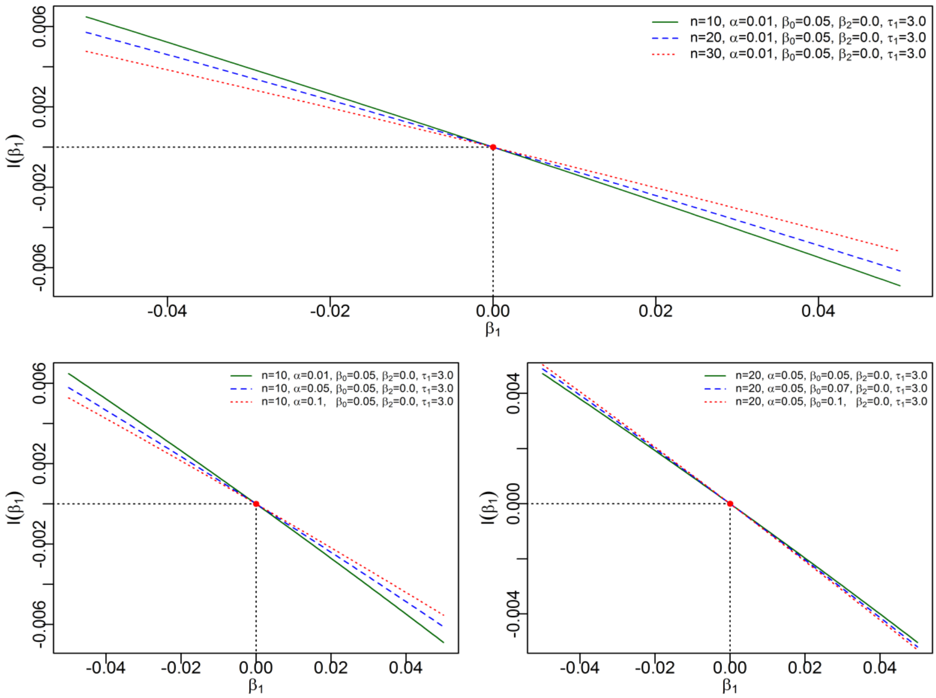
Ընդհանուր առմամբ, գնահատվում են (20) և (21) հավասարումների $m^3 \times k$ թվով արմատներ՝ $\beta_0, \beta_1, \alpha, \tau_1, n$ պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում, որտեղ $\beta_0 \in \omega_{\beta_0}^m$, $\beta_1 \in \omega_{\beta_1}^m$, $\alpha \in \omega_\alpha^m$, $\tau_1 \in \omega_{\tau_1}$ և $n \in \omega_n^k$: Այլ կերպ ասած, (20) և (21) հավասարումներից գնահատվում են հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերություններ՝ Նելսոն-Սիգելի մոդելի միջոցով մոդելավորված սփոթ կորի պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում:

Քայլ 3 – Ինտերպոլյացիա. հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունների համատեղ վարքագիծը սփոթ կորի տարբեր տեսքերի պարագայում ուսումնասիրելու համար դիտարկվում է y'-ի և y''-ի տարբերությունը՝ կախված β_1 պարամետրից, ինչը սահմանում է սփոթ կորի թեքությունը: Այս նպատակով, նախորդ քայլով գնահատված տվյալների հիման վրա, կիրառելով գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդը, գնահատվում է $\mathcal{I}_{\beta_0,\tau_1,\alpha,n}(\beta_1)$ ինտերպոլանտը, ինչը մոտարկում է պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների տարբերության ֆունկցիան՝ կախված β_1 պարամետրից՝ β_0, τ_1, α, n պարամետրերի ֆիքսված արժեքների դեպքում:

Գնահատումները ցույց են տալիս, որ $\mathcal{I}_{\beta_0,\tau_1,\alpha,n}(\beta_1)$ ինտերպոլանտը ընդունում է 0 արժեքը, երբ $\beta_1 = 0$: Բացի դրանից, ինտերպոլանտը դրական կամ բացասական արժեքներ է ընդունում համապատասխանաբար $\beta_1 < 0$ և $\beta_1 > 0$ դեպքերում: Գծապատկեր 1-ը ներկայացնում է վերոգրյալ օրինաչափությունը β_0, τ_1, α և n պարամետրերի որոշակի արժեքների դեպքում:

[23] Ենթադրվում է, որ $m = 50$:

[24] Ենթադրվում է, որ $k = 3$:



Գծապատկեր 1. ***$\mathcal{I}_{\beta_0,\tau_1,\alpha,n}(\beta_1)$ ինտերպոլանտը՝ β_0, τ_1, α և n պարամետրերի որոշակի արժեքների դեպքում***

Կիրառված եռաքայլ ալգորիթմի միջոցով ստացված արդյունքները վկայում են, որ եթե սփոթ կորն ունի աճող տեսք, ապա, այլ հավասար պայմաններում, արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունը գերազանցում է մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությանը: Ինչպես նաև, հակադարձ փոխկապակցվածություն կա պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև, երբ սփոթ կորը նվազող է:

Եզրակացություններ: Հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի դրամական հոսքերի կառուցվածքների տարբերությունը, այլ հավասար պայմաններում, հանգեցնում է պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև տարբերության: Սույն հոդվածում հասարակ արժեկտրոնային և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսերի պարամետրերի (արժեկտրոնի դրույք և արժեկտրոնների քանակ) հավասար լինելու ենթադրության պայմաններում ուսումնասիրվում է պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների համատեղ վարքագիծը՝ սփոթ կորի աճող, նվազող և համահարթ տեսքերի դեպքերում:

Վերոգրյալ խնդրի ուսումնասիրության նկատառումից ելնելով՝ նախ քննության է առնվում անալիտիկ մեթոդների կիրառման արդյունավետության հարցը, այնուհետև թվային մեթոդների հենքով մշակվում է եռաքայլ ալգորիթմ, ինչը հնարավորություն է տալիս վերլուծելու հասարակ արժեկտրոնային և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսերի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև կապը:

Նելսոն-Սիգելի մոդելով սփոթ կորերի սիմուլյացիայի և թվային մեթոդների կիրառման միջոցով ցույց է տրվում, որ աճող սփոթ կորի դեպքում հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունը գերազանցում է մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությանը՝ պարտատոմսերի պարամետրերի (արժեկտրոնի դրույք և արժեկտրոնների քանակ) հավասար լինելու ենթադրության պայմաններում: Նվազող սփոթ կորի դեպքում հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունների միջև առկա է հակադարձ փոխկապակցվածություն, այսինքն՝ արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունը զիջում է մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությանը: Հասարակ արժեկտրոնային պարտատոմսի և մասնակի մարումներով արժեկտրոնային պարտատոմսի մինչև մարում եկամտաբերությունները համընկնում են միայն այն դեպքում, երբ սփոթ կորն ունի համահարթ տեսք:

Օգտագործված գրականություն

1. Afik Z., Gady J., Wiener Z., Duration and Globalization. The Journal of Fixed Income, 28(2), 2018,
2. Arnold T., Earl J.H., Marshall C.D., A Quick Approximation for Modified Bond Duration and Convexity. The Journal of Wealth Management Winter, 18(3), 2015,
3. Buetow G.W., Fabozzi F.J., Hanke B., A Note on Common Interest Rate Risk Measures. The Journal of Fixed Income, 2003, 13(2).
4. CFA Institute Investment Series, Fixed Income Analysis (3rd Edition). Willey & Sons, 2015.
5. Francis J.C., Hua J., Forecasting Yield Curves with Survey Information. The Journal of Portfolio Management, 38 (3), 2012.
6. Fujiwara M., Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Tohoku Mathematical Journal, First series, 10, 1916.
7. Füss R., Nikitina O., Explaining Yield Curve Dynamics. The Journal of Fixed Income, 21(2), 2011.
8. Golub B.W., Tilman L.M., Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components, Analysis, Value, At Risk, And Key Rate Durations. The Journal of Portfolio Management, 23 (4), 1997,
9. Guerard J.B., Schwartz E., Quantitative Corporate Finance. Springer Science & Business Media, 2007.
10. Hirst H. P., Macey W.T., Bounding the Roots of Polynomials. The College Mathematics Journal, 28(4), 1997.
11. Ilmanen A., When do Bond Markets Reward Investors for Interest Rate Risk? The Journal of Portfolio Management, 22(2), 1996.
12. Kalotay A., Buursma J., The Key Rate Durations of Municipal Bonds. The Journal of Fixed Income, 29(2), 2019.

13. Kalotay A.J., Dorigan M.P., What Makes the Municipal Yield Curve Rise? The Journal of Fixed Income, 18(3), 2009.
14. Martellini L., Priaulet P., Priaulet S., Fixed-Income Securities. Willey & Sons, 2003.
15. Nelson C.R., Siegel A.F., Parsimonious Modeling of Yield Curves. Journal of Business, 60 (4), 1987.
16. Smith D.J., Bond Math: The Theory Behind the Formulas. Willey & Sons, 2011.
17. Vasicek O.A., Interpolating the Yield Curve. The Journal of Fixed Income, 2020.

ГОР ХАЧАТРЯН
Аспирант факультета математики и механики ЕГУ

Совместное поведение доходностей к погашению по обычным и амортизационным облигациям в условиях различных форм спот-кривых.– В данной статье рассматривается совместное поведение доходностей к погашению по обычным и амортизационным облигациям в условиях восходящей и нисходяще-наклонной спот-кривой, когда параметры облигаций (ставка купона и количество периодов) равны. При моделировании спот-кривых с использованием модели Нельсона-Сигеля и применении численных методов было показано, что если спот-кривая имеет наклон вверх, то доходность к погашению по обычным облигациям превышает доходность к погашению по амортизационным облигациям. Кроме того, обратная зависимость сохраняется, когда спот-кривая имеет наклонную вниз форму.

Ключевые слова: *облигация, амортизационная облигация, доходность к погашению, спот кривая, модель Нельсона-Сигеля, интерполяция.*
JEL: C02, C10, G12

GOR KHACHATRYAN
PhD student at the Faculty of Mathematics and Mechanics at YSU

Joint Behavior of Conventional and Amortizing Bonds' Yields to Maturity under Different Shapes of Spot Curve.– This paper studies joint behavior of conventional and amortizing bonds' yields to maturity under upward and downward-sloping spot curve conditions when the bonds' parameters (coupon rate and number of periods) are equal. Simulating spot curves using Nelson-Siegel model and applying numerical methods, it has been shown that if spot curve is upward-sloping, then conventional bond's yield to maturity is greater than amortizing bond's yield to maturity. Furthermore, the inverse relationship holds when spot curve has a downward-sloping shape.

Keywords: *conventional bond, amortizing bond, yield to maturity, spot curve, Nelson-Siegel model, interpolation.*
JEL: C02, C10, G12